ISSN 2686-9667. Вестник российских университетов. Математика

Том 28, № 141 2023

НАУЧНАЯ СТАТЬЯ

DOI 10.20310/2686-9667-2023-28-141-60-67

УДК 517.926

О континуальных спектрах показателей колеблемости линейных однородных дифференциальных систем

Айдамир Хазретович СТАШ

ФГБОУ ВО «Адыгейский государственный университет»

385000, Российская Федерация, г. Майкоп, ул. Первомайская, 208

Аннотация. Тематика исследования данной работы находится на стыке двух разделов качественной теории дифференциальных уравнений, а именно: теории показателей Ляпунова и теории колеблемости. В данной работе изучаются спектры (т. е. множества различных значений на ненулевых решениях) показателей колеблемости знаков (строгих и нестрогих), нулей, корней и гиперкорней линейных однородных дифференциальных систем с непрерывными на положительной полуоси коэффициентами. Для любого $n \geq 2$ установлено существование n-мерной дифференциальной системы с континуальными спектрами показателей колеблемости. При четных n спектры всех показателей колеблемости заполняют один и тот же отрезок числовой оси с наперед заданными произвольными положительными несоизмеримыми концами, а при нечетных n к указанным спектрам еще добавляется ноль. Оказалось, что для каждого решения построенной дифференциальной системы все показатели колеблемости совпадают между собой. При доказательстве результатов настоящей работы отдельно рассмотрены случаи четности и нечетности n. Полученные результаты носят теоретический характер, они расширяют наши представления о возможных спектрах показателей колеблемости линейных однородных дифференциальных систем.

Ключевые слова: дифференциальные уравнения, линейные однородные дифференциальные системы, спектр показателя системы, колеблемость решения, число нулей решения, показатели колеблемости, частоты Сергеева

Для цитирования: *Сташ А.Х.* О континуальных спектрах показателей колеблемости линейных однородных дифференциальных систем // Вестник российских университетов. Математика. 2023. Т. 28. № 141. С. 60–67. DOI 10.20310/2686-9667-2023-28-141-60-67.

SCIENTIFIC ARTICLES

DOI 10.20310/2686-9667-2023-28-141-60-67

On the continuum spectra of the oscillation exponents of linear homogeneous differential systems

Aydamir Kh. STASH
Adyghe State University
208, Pervomayskaya St., Maykop, 385000, Russian Federation

Abstract. The research subject of this work is at the junction of two sections of the qualitative theory of differential equations, namely: the theory of Lyapunov exponents and the theory of oscillation. In this paper, we study the spectra (i. e., sets of different values on nonzero solutions) of the exponents of oscillation of signs (strict and nonstrict), zeros, roots, and hyperroots of linear homogeneous differential systems with coefficients continuous on the positive semiaxis. For any $n \geq 2$, the existence of an n-dimensional differential system with continuum spectra of the oscillation exponents is established. For even n, the spectra of all the oscillation exponents fill the same segment of the numerical axis with predetermined arbitrary positive incommensurable ends, and for odd n, zero is added to the indicated spectra. It turns out that for each solution of the constructed differential system, all the oscillation exponents coincide with each other. When proving the results of this work, the cases of even and odd n are considered separately. The results obtained are theoretical in nature, they expand our understanding of the possible spectra of oscillation exponents of linear homogeneous differential systems.

Keywords: differential equations, linear homogeneous differential systems, spectrum of the system exponent, oscillation of solution, number of zeros of solution, exponents of oscillation, Sergeev's frequencies

Mathematics Subject Classification: 34A30, 34C10, 34D05.

For citation: Stash A.Kh. On the continuum spectra of the exponents of linear homogeneous differential systems. *Vestnik rossiyskikh universitetov. Matematika = Russian Universities Reports. Mathematics*, 2023, vol. 28, no. 141, pp. 60–67. DOI 10.20310/2686-9667-2023-28-141-60-67. (In Russian, Abstr. in Engl.)

Введение

В работах [1–3] И. Н. Сергеева вводились и исследовались различные характеристики ляпуновского типа ненулевых решений линейных дифференциальных уравнений и систем, отвечающие за колеблемость, вращаемость и блуждаемость решений на полупрямой. Далее, в 2015 году в статье [4] все введенные к тому моменту характеристики ляпуновского типа были систематизированы, что привело к изменению названий некоторых из них: в частности, полные и векторные частоты были переименованы соответственно в сильные и слабые показатели колеблемости (см. [5–8]). В работах [9–12] характеристические частоты [1] стали называться частотами Сергеева.

Одномерный случай является вырожденным, поскольку решения линейного однородного дифференциального уравнения первого порядка в силу теоремы существования и единственности не имеют вовсе нулей, а значит, все показатели колеблемости равны нулю. Известно (см. [3]), что спектры показателей колеблемости двумерной системы, отвечающей линейному однородному уравнению второго порядка, состоят ровно из одного элемента. Для двумерных линейных систем с периодическими коэффициентами спектры показателей колеблемости нулей могут содержать наборы, состоящие из сколь угодно большего количества существенных значений (см. [13]). Если отказаться от периодичности коэффициентов двумерной системы, то спектры могут содержать счетные множества существенных значений (см. [14]). Исследование спектров показателей колеблемости автономных систем было начато в работах [3, 15] и полностью завершено в [16]. Спектры показателей колеблемости неавтономных систем в общем случае не были исследованы.

Настоящая работа логически продолжает и развивает результаты работы [17], в которой доказано существование двумерной дифференциальной системы с непрерывными неограниченными на положительной полуоси коэффициентами, спектры показателей колеблемости строгих знаков, нулей и корней которой заполняют один и тот же отрезок числовой оси. Ниже эти свойства для всех показателей колеблемости перенесены на отрезки с произвольными несоизмеримыми концами и обобщены на n-мерные системы.

1. Характеристики колеблемости решений линейных однородных дифференциальных уравнений и систем

Для заданного $n \in \mathbb{N}$ обозначим через $\tilde{\mathcal{M}}^n$ множество линейных систем

$$\dot{x} = A(t)x, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad t \in \mathbb{R}_+ \equiv [0, +\infty),$$

с *непрерывными* оператор-функциями $A: \mathbb{R}_+ \to \operatorname{End}\mathbb{R}^n$ (каждую из которых будем отождествлять с соответствующей системой). Подмножество множества $\tilde{\mathcal{M}}^n$, отвечающих *линейным однородным дифференциальным уравнениям n-го порядка*, обозначим через $\tilde{\mathcal{E}}^n$. Множество всех ненулевых решений системы $A \in \tilde{\mathcal{M}}^n$ обозначим через $\mathcal{S}_*(A)$. Далее, звездочкой снизу будем помечать любое линейное пространство, в котором выколот нуль. Положим

$$\mathcal{S}^n_{\mathcal{M}} = \bigcup_{A \in \tilde{\mathcal{M}}^n} \mathcal{S}_*(A), \quad \mathcal{S}^n_{\mathcal{E}} = \bigcup_{a \in \tilde{\mathcal{E}}^n} \mathcal{S}_*(a).$$

О п р е д е л е н и е 1.1 (см. [1]). Скажем, что в точке $t > 0$ происходит *строгая* (*нестрогая*) *смена знака* функции $y\colon \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$, если в любой окрестности этой точки функция y принимает как положительные (неотрицательные), так и отрицательные (неположительные) значения.

О п р е д е л е н и е 1.2 (см. [1,2]). Для момента $t>0$ и функции $y\colon \mathbb{R}_+\to\mathbb{R}$ введем следующие обозначения:

$\nu^-(y,t)$ — число точек ее *строгой смены знака* на промежутке $(0,t]$;

$\nu^\sim(y,t)$ — число точек ее *нестрогой смены знака* на промежутке $(0,t]$;

$\nu^0(y,t)$ — число ее *нулей* на промежутке $(0,t]$;

$\nu^+(y,t)$ — число ее *корней* (т. е. нулей с учетом их *кратности*) на промежутке $(0,t]$;

$\nu^*(y,t)$ — число ее *гиперкратных корней* на промежутке $(0,t]$: при его подсчете каждый некратный корень берется ровно один раз, а кратный — бесконечно много раз.

Далее, для ненулевого вектора $m\in\mathbb{R}^n_*$ и вектор-функции $x\in\mathcal{S}^n_{\mathcal{M}}$ введем обозначение $\nu^\alpha(x,m,t)\equiv\nu^\alpha(\langle x,m\rangle,t)$, где $\alpha\in\{-,\sim,0,+,*\}$, $\langle x(\cdot),m\rangle$ — скалярное произведение.

О п р е д е л е н и е 1.3 (см. [3, 4]). *Верхние* (*нижние*) *частоты Сергеева строгих знаков, нулей* и *корней* любого решения $y\in\mathcal{S}^n_{\mathcal{E}}$ при $\gamma\in\{-,0,+\}$ соответственно зададим формулами

$$\hat\nu^\gamma(y)\equiv\varlimsup_{t\to+\infty}\frac{\pi}{t}\nu^\gamma(y,t)\qquad\Bigl(\check\nu^\gamma(y)\equiv\varliminf_{t\to+\infty}\frac{\pi}{t}\nu^\gamma(y,t)\Bigr).$$

О п р е д е л е н и е 1.4 (см. [2–4]). *Верхние* (*нижние*) *сильный* и *слабый показатели колеблемости знаков, нулей, корней* и *гиперкорней* функции $x\in\mathcal{S}^n_{\mathcal{M}}$ при $\alpha\in\{-,\sim,0,+,*\}$ соответственно зададим формулами

$$\begin{aligned}
\hat\nu^\alpha_\bullet(x)&\equiv\inf_{m\in\mathbb{R}^n_*}\varlimsup_{t\to\infty}\frac{\pi}{t}\nu^\alpha(x,m,t)\quad\Bigl(\check\nu^\alpha_\bullet(x)\equiv\inf_{m\in\mathbb{R}^n_*}\varliminf_{t\to\infty}\frac{\pi}{t}\nu^\alpha(x,m,t)\Bigr),\\
\hat\nu^\alpha_\circ(x)&\equiv\varlimsup_{t\to\infty}\inf_{m\in\mathbb{R}^n_*}\frac{\pi}{t}\nu^\alpha(x,m,t)\quad\Bigl(\check\nu^\alpha_\circ(x)\equiv\varliminf_{t\to\infty}\inf_{m\in\mathbb{R}^n_*}\frac{\pi}{t}\nu^\alpha(x,m,t)\Bigr).
\end{aligned}$$

В случае совпадения верхнего и нижнего значений какой-либо из характеристик колеблемости будем называть ее *точной*, убирая в ее обозначении крышечку и галочку.

2. Основной результат

Теорема 2.1. *Для любого $n\ge 2$ и любых несоизмеримых $\omega_2>\omega_1>0$ найдется система $A\in\tilde{\mathcal{M}}^n$ с неограниченными коэффициентами такая, что при каждом $\alpha\in\{-,\sim,0,+,*\}$ справедливы соотношения*

$$\begin{aligned}
\nu^\alpha_\bullet(\mathcal{S}_*(A))=\nu^\alpha_\circ(\mathcal{S}_*(A))&=[\omega_1,\omega_2],\quad \textit{если } n \textit{ четное};\\
\nu^\alpha_\bullet(\mathcal{S}_*(A))=\nu^\alpha_\circ(\mathcal{S}_*(A))&=[\omega_1,\omega_2]\cup\{0\},\quad \textit{если } n \textit{ нечетное}.
\end{aligned}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. **1.** Пусть $n=2$. Фиксируем произвольные несоизмеримые $\omega_2>\omega_1>0$. Непосредственной проверкой можно убедиться в том, что вектор-функции

$$x^1(t)=\begin{pmatrix}\cos\omega_2t\\ -e^{-t}\cos\omega_1t\end{pmatrix},\qquad x^2(t)=\begin{pmatrix}\cos\omega_1t\\ e^{-t}\cos\omega_2t\end{pmatrix}$$

являются решениями двумерной системы

$$A\equiv\begin{pmatrix}\dfrac{-\omega_2\sin\omega_2t\cos\omega_2t-\omega_1\sin\omega_1t\cos\omega_1t}{\cos^2\omega_2t+\cos^2\omega_1t} & \dfrac{\omega_2\sin\omega_2t\cos\omega_1t-\omega_1\sin\omega_1t\cos\omega_2t}{e^{-t}\left(\cos^2\omega_2t+\cos^2\omega_1t\right)}\\[2ex] \dfrac{e^{-t}\left(\omega_1\sin\omega_1t\cos\omega_2t-\omega_2\sin\omega_2t\cos\omega_1t\right)}{\cos^2\omega_2t+\cos^2\omega_1t} & \dfrac{-\omega_1\sin\omega_1t\cos\omega_1t-\omega_2\sin\omega_2t\cos\omega_2t}{\cos^2\omega_2t+\cos^2\omega_1t}-1\end{pmatrix}.$$

Заметим, что коэффициенты системы A непрерывны, а вектор-функции x^1, x^2 линейно независимы на $\mathbb{R}_+$, так как на $\mathbb{R}_+$ выполняются неравенства

$$\cos^2\omega_2 t + \cos^2\omega_1 t > 0,$$

$$\det X(t) \equiv \det\big(x^1(t), x^2(t)\big) = e^{-t}\big(\cos^2\omega_2 t + \cos^2\omega_1 t\big) > 0.$$

2. Для произвольного решения

$$x(t) = c_1 x^1(t) + c_2 x^2(t) \in \mathcal{S}_*(A)$$

и ненулевого вектора $m = (m_1,\, m_2)$ скалярное произведение $\langle x, m\rangle$ представимо в виде

$$m_1\left(c_1\cos\omega_2 t + c_2\cos\omega_1 t\right) + m_2 e^{-t}\left(-c_1\cos\omega_1 t + c_2\cos\omega_2 t\right). \tag{2.1}$$

а. Если $c_1 = 0$, то минимум в определениях показателей колеблемости реализуется на векторе $m = (m_1,\, m_2)$ при $m_2 = 0$ (см. [16]) и

$$\nu_\circ^\alpha(x) = \nu_\bullet^\alpha(x) = \omega_1, \quad \alpha\in\{-,\sim,0,+,*\}. \tag{2.2}$$

б. При $c_2 = 0$ также справедливы равенства (2.2), но минимум в определениях показателей колеблемости реализуется на векторе $m = (m_1,\, m_2)$ при $m_1 = 0$.

в. Выделим из множества $\mathcal{S}_*(A)$ однопараметрическое семейство решений

$$x_c(t) = c x^1(t) + x^2(t), \quad c > 0,$$

и введем в рассмотрение функции

$$f_c(t) = \cos\omega_1 t + c\cos\omega_2 t, \quad g_c(t) = \cos\omega_1 t + \cos(\omega_2 t + \pi)/c.$$

Тогда из соотношения

$$\langle x_c(t), m\rangle = m_1 f_c(t) - m_2 c e^{-t} g_c(t),$$

в силу остаточности функционала ν^- (см. [1]), следует

$$\nu^-(\langle x_c, m\rangle) = \begin{cases}\nu^-(f_c), & m_1\neq 0\\ \nu^-(g_c), & m_1 = 0.\end{cases}$$

По теореме 1 из работы [18] функция $\nu^+(f_c)$ при $c > 0$ непрерывна: при $0 < c < \omega_1/\omega_2$ она принимает значение ω_1, при $c \geq 1$ — значение ω_2, а при $\omega_1/\omega_2 < c < 1$ функция $\nu^+(f_c)$ строго возрастает.

Очевидно, что при $c \in (0,\, 1]$ имеем $1/c \geq 1$, поэтому $\nu^+(g_c) = \omega_2$. Следовательно, на полуинтервале $c \in (0,\, 1]$ выполнено неравенство $\nu^+(f_c) \leq \nu^+(g_c)$.

Частота Сергеева корней $\nu^+(h_{c,\phi})$ функции

$$h_{c,\phi}(t) = \cos\omega_1 t + c\cos(\omega_2 t + \phi)$$

согласно [18, теорема 1] не зависит от значения ϕ, и для каждого $c \in (0,\, 1]$ найдется такое ϕ (см. [19]), что все нули функции $h_{c,\phi}$ являются точками строгих смен знаков, поэтому

$$\nu^-(h_{c,\phi}) = \nu^-(f_c) = \nu^0(f_c) = \nu^+(f_c), \quad \nu^-(g_c) = \nu^0(g_c) = \nu^+(g_c).$$

Следовательно, для любого решения x_c точные нижние грани в определениях показателей колеблемости знаков, нулей и корней достигаются на любом векторе $m=(m_1,m_2)\in\mathbb{R}^2$ при $m_1\neq 0$, поэтому при каждом $\alpha\in\{-,\sim,0,+\}$ будем иметь

$$\nu_\circ^\alpha(x)=\nu_\bullet^\alpha(x)=\nu^+(\langle x,m\rangle).$$

Если функция f_c имеет кратные нули, то по теореме 2 из [2] ненулевые m_1 и m_2 можно подобрать так, чтобы при любом $t>0$ выполнялось неравенство $\nu^*(x_c,m,t)<+\infty$. Из этого неравенства следует $\nu_\circ^*(x)=\nu_\bullet^*(x)=\nu^+(\langle x,m\rangle)$.

г. Для рассмотренного подмножества решений множества $\mathcal{S}_*(A)$ показатели колеблемости знаков, нулей, корней и гиперкорней заполняют отрезок $[\omega_1;\omega_2]$, а для остальных решений системы $A\in\tilde{\mathcal{M}}^2$ значения показателей колеблемости повторяются.

3. Пусть $n>2$ – четное. Тогда выбираем систему $A\in\tilde{\mathcal{M}}^n$ с фундаментальной системой решений

$$x^1(t)=\begin{pmatrix}\cos\omega_2 t\\ -e^{-t}\cos\omega_1 t\\ 0\\ \dots\\ 0\end{pmatrix},\quad x^2(t)=\begin{pmatrix}\cos\omega_1 t\\ e^{-t}\cos\omega_2 t\\ 0\\ \dots\\ 0\end{pmatrix},\dots,$$

$$x^{n-1}(t)=\begin{pmatrix}0\\ \dots\\ 0\\ \cos\omega_2 t\\ -e^{-t}\cos\omega_1 t\end{pmatrix},\quad x^n(t)=\begin{pmatrix}0\\ \dots\\ 0\\ \cos\omega_1 t\\ e^{-t}\cos\omega_2 t\end{pmatrix}.$$

Важно заметить, что скалярное произведение любого решения $x\in\mathcal{S}_*(A)$ и вектора $m\in\mathbb{R}^n_*$ имеет вид (2.1), а значит, повторяются рассуждения предыдущих пунктов. Следовательно, спектры показателей колеблемости знаков, нулей, корней и гиперкорней совпадают с отрезком $[\omega_1;\omega_2]$.

4. Пусть $n>2$ – нечетное. Тогда выбираем систему $A\in\tilde{\mathcal{M}}^n$ с фундаментальной системой решений

$$x^1(t)=\begin{pmatrix}\cos\omega_2 t\\ -e^{-t}\cos\omega_1 t\\ 0\\ \dots\\ 0\end{pmatrix},\quad x^2(t)=\begin{pmatrix}\cos\omega_1 t\\ e^{-t}\cos\omega_2 t\\ 0\\ \dots\\ 0\end{pmatrix},\dots,$$

$$x^{n-2}(t)=\begin{pmatrix}0\\ \dots\\ 0\\ \cos\omega_2 t\\ -e^{-t}\cos\omega_1 t\\ 0\end{pmatrix},\quad x^{n-1}(t)=\begin{pmatrix}0\\ \dots\\ 0\\ \cos\omega_1 t\\ e^{-t}\cos\omega_2 t\\ 0\end{pmatrix},\quad x^n(t)=\begin{pmatrix}0\\ \dots\\ 0\\ 0\\ e^t\end{pmatrix}.$$

Запишем общее решение системы

$$x(t)=c_1x^1(t)+c_2x^2(t)+\dots+c_{n-1}x^{n-1}(t)+c_nx^n(t).$$

Если $c_n = 0$, то повторяются все рассуждения из пункта 3 настоящего доказательства.

Если $c_n \neq 0$, то для любого решения $x \in \mathcal{S}_*(A)$ все показатели колеблемости равны нулю, поскольку точная нижняя грань реализуется на векторе $m = (0, \ldots, 0, 1) \in \mathbb{R}^n_*$.

Таким образом, в рассматриваемом случае спектры показателей колеблемости знаков, нулей, корней и гиперкорней совпадают с множеством $[\omega_1; \omega_2] \cup \{0\}$. $\square$

References

[1] И. Н. Сергеев, "Определение и свойства характеристических частот линейного уравнения", Труды семинара имени И. Г. Петровского, **25**, Изд-во Моск. ун-та, М., 2006, 249–294; англ. пер.:I. N. Sergeev, "Definition and properties of characteristic frequencies of a linear equation", *Journal of Mathematical Sciences*, **135**:1 (2006), 2764–2793.

[2] И. Н. Сергеев, "Замечательное совпадение характеристик колеблемости и блуждаемости решений дифференциальных систем", *Математический сборник*, **204**:1 (2013), 119–138; англ. пер.:I. N. Sergeev, "The remarkable agreement between the oscillation and wandering characteristics of solutions of differential systems", *Sbornik: Mathematics*, **204**:1 (2013), 114–132.

[3] И. Н. Сергеев, "Характеристики колеблемости и блуждаемости решений линейной дифференциальной системы", *Известия РАН. Серия математическая*, **76**:1 (2012), 149–172; англ. пер.:I. N. Sergeev, "Oscillation and wandering characteristics of solutions of a linear differential systems", *Izvestiya: Mathematics*, **76**:1 (2012), 139–162.

[4] И. Н. Сергеев, "Полный набор соотношений между показателями колеблемости, вращаемости и блуждаемости решений дифференциальных систем", *Известия Института математики и информатики УдГУ*, 2015, № 2(46), 171–183. [I. N. Sergeev, "The complete set of relations between the oscillation, rotation and wandering indicators of solutions of differential systems", *Proceedings of the Institute of Mathematics and Computer Science of UdSU*, 2015, № 2(46), 171–183 (In Russian)].

[5] И. Н. Сергеев, "Показатели колеблемости, вращаемости и блуждаемости решений дифференциальных систем", *Математические заметки*, **99**:5 (2016), 732–751; англ. пер.:I. N. Sergeev, "Oscillation, rotation, and wandering exponents of solutions of differential systems", *Mathematical Notes*, **99**:5 (2016), 729–746.

[6] И. Н. Сергеев, "Ляпуновские характеристики колеблемости, вращаемости и блуждаемости решений дифференциальных систем", *Труды Семинара им. И. Г. Петровского*, **31** (2016), 177–219; англ. пер.:I. N. Sergeev, "Lyapunov characteristics of oscillation, rotation, and wandering of solutions of differential systems", *Journal of Mathematical Sciences*, **234**:4 (2018), 497–522.

[7] И. Н. Сергеев, "Колеблемость, вращаемость и блуждаемость решений линейных дифференциальных систем", *Труды Международного симпозиума «Дифференциальные уравнения—2016», Пермь, 17–18 мая 2016*, Итоги науки и техн. Сер. Соврем. мат. и ее прил. Темат. обз., **132**, ВИНИТИ РАН, М., 2017, 117–121; англ. пер.:I. N. Sergeev, "Oscillation, rotation, and wandering of solutions to linear differential systems", *Journal of Mathematical Sciences*, **230**:5 (2018), 770–774.

[8] И. Н. Сергеев, "О показателях колеблемости, вращаемости и блуждаемости дифференциальных систем, задающих повороты плоскости", *Вестник МГУ имени М. В. Ломоносова. Серия 1: Математика. Механика*, 2019, № 1, 21–26; англ. пер.:I. N. Sergeev, "Oscillation, rotatability, and wandering characteristic indicators for differential systems determining rotations of plane", *Moscow University Mathematics Bulletin*, **74**:1 (2019), 20–24.

[9] Е. А. Барабанов, А. С. Войделевич, "К теории частот Сергеева нулей, знаков и корней решений линейных дифференциальных уравнений. I", *Дифференциальные уравнения*, **52**:10 (2016), 1302–1320; англ. пер.:E. A. Barabanov, A. S. Voidelevich, "Remark on the theory of Sergeev frequencies of zeros, signs and roots for solution of linear differential equation:I", *Differential Equation*, **52**:10 (2016), 1249–1267.

[10] Е. А. Барабанов, А. С. Войделевич, "К теории частот Сергеева нулей, знаков и корней решений линейных дифференциальных уравнений. II", *Дифференциальные уравнения*, **52**:12 (2016), 1595–1609; англ. пер.:E. A. Barabanov, A. S. Voidelevich, "Remark on the theory of Sergeev frequencies of zeros, signs and roots for solution of linear differential equation. II", *Differential Equation*, **52**:12 (2016), 1523–1538.

[11] В. В. Быков, “О бэровской классификации частот Сергеева нулей и корней решений линейных дифференциальных уравнений”, *Дифференциальные уравнения*, **52**:4 (2016), 419–425; англ. пер.:V. V. Bykov, “On the Baire classification of Sergeev frequencies of zeros and roots of solution of linear differential equation”, *Differential Equation*, **52**:4 (2016), 413–420.

[12] А. С. Войделевич, “О спектрах верхних частот Сергеева линейных дифференциальных уравнений”, *Журнал Белорусского государственного университета. Математика. Информатика*, 2019, №1, 28–32. [A. S. Voidelevich, “On spectra of upper Sergeev frequencies of linear differential equation”, *Journal of the Belarusian State University. Mathematics. Computer science*, 2019, №1, 28–32 (In Russian)].

[13] А. Х. Сташ, “О конечных спектрах полной и векторной частот линейной двумерной дифференциальной периодической системы”, *Вестник Адыгейского государственного университета. Сер. Естественно-математические и технические науки*, 2014, №1(133), 30–36. [A. Kh. Stash, “On finite spectra of full and vector frequencies of linear two-dimensional differential periodic system”, *Bulletin of the Adyghe State University. Series. Natural-mathematical and technical sciences*, 2014, №1(133), 30–36 (In Russian)].

[14] А. Х. Сташ, “О счетных спектрах полной и векторной частот линейной двумерной дифференциальной системы”, *Вестник Адыгейского государственного университета. Сер. Естественно-математические и технические науки*, 2014, №2(137), 23–32. [A. Kh. Stash, “About calculating ranges of full and vector frequencies of the linear two-dimensional differential system”, *Bulletin of the Adyghe State University. Series. Natural-mathematical and technical sciences*, 2014, №2(137), 23–32 (In Russian)].

[15] Д. С. Бурлаков, С. В. Цой, “Совпадение полной и векторной частот решений линейной автономной системы”, Труды семинара им. И. Г. Петровского, 2014, 75–93; англ. пер.:D. S. Burlakov, S. V. Tsoii, “Coincidence of complete and vector frequencies of solutions of a linear autonomous system”, *Journal of Mathematical Sciences*, **210**:2 (2015), 155–167.

[16] А. Х. Сташ, “Свойства показателей колеблемости решений линейных автономных дифференциальных систем”, *Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки*, **29**:4 (2019), 558–568. [A. Kh. Stash, “Properties of exponents of oscillation of linear autonomous differential system solutions”, *Bulletin of the Udmurt University. Mathematics. Mechanics. Computer Science*, **29**:4 (2019), 558–568 (In Russian)].

[17] А. Х. Сташ, “Существование двумерной линейной системы с континуальными спектрами полных и векторных частот”, *Дифференциальные уравнения*, **51**:1 (2015), 143–144; англ. пер.:A. Kh. Stash, “Existence of a two-dimensional linear system with continual spectra of total and vector frequencies”, *Differential Equation*, **51**:1 (2015), 146-148.

[18] А. Ю. Горицкий, Т. Н. Фисенко, “Характеристические частоты нулей суммы двух гармонических колебаний”, *Дифференциальные уравнения*, **48**:4 (2012), 479–486; англ. пер.:A. Y. Goritskii, T. N. Fisenko, “Characteristic frequencies of zeros of a sum of two harmonic oscillations”, *Differential Equation*, **48**:4 (2012), 486–493.

[19] М. В. Смоленцев, “Пример периодического дифференциального уравнения третьего порядка, спектр частот которого содержит отрезок”, *Дифференциальные уравнения*, **50**:10 (2014), 1413–1417; англ. пер.:M. V. Smolentsev, “Example of a third-order periodic differential equation whose frequency spectrum contains a closed interval”, *Differential Equation*, **50**:10 (2014), 1408—1412.

Информация об авторе

Сташ Айдамир Хазретович, кандидат физико-математических наук, декан факультета математики и компьютерных наук. Адыгейский государственный университет, г. Майкоп, Российская Федерация. E-mail: aidamir.stash@gmail.com

ORCID: https://orcid.org/0000-0003-3008-7859

Information about the author

Aydamir Kh. Stash, Candidate of Physics and Mathematics, Dean of the Faculty of Mathematics and Computer Science. Adyghe State University, Maykop, Russian Federation. E-mail: aidamir.stash@gmail.com

ORCID: https://orcid.org/0000-0003-3008-7859

Поступила в редакцию 20.01.2023 г.
Поступила после рецензирования 06.03.2023 г.
Принята к публикации 10.03.2023 г.

Received 20.01.2023
Reviewed 06.03.2023
Accepted for press 10.03.2023